

Exercice

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} \, dx$ et pour tout entier naturel n non nul

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} \, dx.$$

1. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.
2.
 - a. Calculer $I_0 - I_1$.
 - b. En déduire I_1 .
3.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_n - I_{n+1} = \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1}$.
 - b. Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n .
4. Soit n un entier naturel non nul.
On admet que si x appartient à l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$ alors $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$.
 - b. En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} + \dots + \frac{(\frac{1}{2})^n}{n}.$$

- a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.
- b. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.